1 Einführung in die Finite-Elemente-Methode (FEM)

Die Finite-Elemente-Methode ist in den letzten 60 Jahren entwickelt worden. Sie wird in der Praxis für Berechnungsaufgaben im Maschinen-, Apparate- und Fahrzeugbau eingesetzt. Die Einsatzgebiete sind sehr breit:

- Statik (Verformungen, Spannungen etc.)
- Dynamik (Eigenfrequenzen etc.)
- Strömungsprobleme (Geschwindigkeiten, Drücke etc.)
- Stabilitätsprobleme (Knicken, Beulen etc.)
- Temperaturprobleme (Temperaturverteilungen, Spannungen etc.)
- Akustik (Schallverteilung etc.)
- Crash-Verhalten (Verformungen, Beschleunigungen etc.)
- Umformprozesse
- Elektrotechnik (elektrische Felder etc.)
- Optimierungsprobleme.

In diesem Buch werden wir uns nur mit der Statik, das heißt mit statisch-linearen Untersuchungen beschäftigen. Statisch bedeutet, dass die Last konstant und zeitunabhängig ist. Linear heißt, dass die Belastung proportional zur Verformung (Spannung) ist. Die meisten Vorgänge in der Technik laufen nichtlinear ab. In vielen Fällen ist die viel einfachere lineare Betrachtung als Annäherung ausreichend. Gerade bei zähen Werkstoffen wie Stahl besteht unterhalb der Streckgrenze ein linearer Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung. Für die Berechnungen in diesem Buch werden die Bauteile immer im elastischen Bereich belastet. Wir befinden uns somit im mehr oder weniger linearen Bereich.

Die Finite-Elemente-Methode ermöglicht realitätsnahe Aussagen durch Rechnersimulation und verkürzt somit die Produktentwicklungszeit. Die Vorteile im Überblick:

- Senkung der Entwicklungszeit
- Senkung der Entwicklungskosten
- Senkung der Produktionskosten
- Einsparung von Material
- Frühzeitiges Erkennen von Schwachstellen
- Qualitätssteigerung der Konstruktion
- Optimierung der Konstruktion
- Reduzierung von Versuchsreihen.

M. Brand, *Grundlagen FEM mit SolidWorks 2010*, DOI 10.1007/978-3-8348-9838-8_1,

Die Verkürzung der Entwicklungszeit erlaubt es, mit einem neuen Produkt schneller am Markt zu sein. Bereits in der Entwicklungsphase können wesentliche Eigenschaften der Konstruktion überprüft und optimiert werden. Mit der FEM-Simulation ist es möglich, schon beim ersten Prototypen recht gute Resultate zu erzielen.

Damit man als Ingenieur oder Techniker gewinnbringend mit dieser Methode arbeiten kann, müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein:

- Leistungsfähige Soft- und Hardware
- Kenntnisse über Grundlagen der FEM-Theorie
- Bedienung einer FEM-Software
- Ingenieurwissen zur kritischen Beurteilung der Ergebnisse.

SolidWorks Simulation ist ein FE-Modul, das im CAD-Programm SolidWorks integriert ist. Es ist ganz klar auf die Benutzung für Nicht-Spezialisten – Zielgruppe Konstrukteure – zugeschnitten. Um Standardberechnungen mit dieser Software auszuführen, muss man nicht den gesamten mathematischen Hintergrund dieser Methode kennen. Kenntnisse über die Grundlagen der FEM-Theorie sind aber dennoch erforderlich, damit man versteht, was die Software während eines Analysevorganges berechnet. Fehlende Erfahrung und Übung im Umgang mit solchen Programmen können zu großen Fehlern führen. Dieses Buch soll dem Leser die Grundlagen der FEM-Analyse mit SolidWorks Simulation verständlich machen. Um die jeweilige Problemstellung erkennen, Systemgrenzen definieren und Lager- bzw. Lastdefinitionen möglichst realitätsnahe festlegen zu können, braucht es fundiertes Ingenieurwissen. So kann man zum Beispiel bei der Wahl eines falschen Lagertyps sehr schnell im Resultat eine Zehnerpotenz daneben liegen.

Bis vor wenigen Jahren wurden FEM-Analysen nur von Spezialisten durchgeführt. Heute geht der Trend in die Richtung, dass auch von Konstrukteuren vermehrt Berechnungsaufgaben verlangt werden. Dafür gibt es verschiedene Gründe [7]:

- Kostengünstigere leistungsfähige FEM-Programme
- Höhere Qualifikation der Konstrukteure
- Hoher Kostendruck
- Großer Termindruck
- Gestiegene Optimierungsanforderungen.

Die modernen Simulationsprogramme wie SolidWorks Simulation mit guten Benutzeroberflächen erfordern für einfachere Berechnungsaufgaben nicht mehr den vollen theoretischen Hintergrund. Viele Konstrukteure bringen aus ihrer Ausbildung fundierte Kenntnisse in Festigkeitslehre und auch der FEM-Analyse mit. Somit können auch Konstrukteure innerhalb bestimmter Grenzen Standardberechnungen übernehmen. Die Entwicklungskosten müssen stetig reduziert werden, was ebenfalls für die konstruktionsintegrierte FEM-Analyse spricht.

Der große Termindruck verlangt, dass Geräte, Maschinen und Anlagen schon im ersten Entwurf möglichst optimiert werden.

Zu den Hauptaufgaben der Festigkeitslehre gehören unter anderem Verformungs- und Spannungsberechnungen. Wie wir im Buch sehen werden, kann die FEM-Analyse bei solchen Berechnungen eine große Hilfestellung bieten. Solange ein Bauteil eine einfache Geometrie besitzt, können Verformungen und Spannungen mit wenig Aufwand „von Hand" berechnet werden. Wird die Geometrie aber komplizierter, stößt man mit dieser Methode sehr schnell an Grenzen.

Es gibt in der Konstruktion zwei typische Aufgabenstellungen:

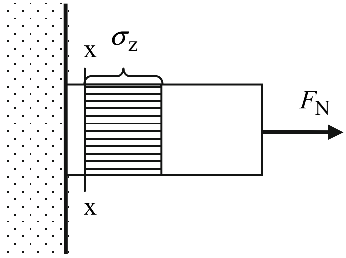
- Dimensionierung eines Bauteils: meist überschlägige Auslegung im Entwurfsstadium
- Festigkeits- und Verformungsnachweis: genauere Verformungs- und Spannungsberechnungen an einem auskonstruierten Bauteil.

Die Erbringung des Festigkeits- und Verformungsnachweises an einem auskonstruierten Bauteil ist bedeutend schwieriger als eine Vordimensionierung. Dies vor allem dann, wenn es sich um komplizierte Bauteile handelt. Bei solchen komplizierten Teilen ist oftmals eine Vereinfachung der Bauteilgeometrie erforderlich, die aber die Qualität der Ergebnisse nicht zu stark beeinträchtigen darf. Diese Vereinfachung ist oft notwendig, da es Probleme mit der Vernetzung (siehe dazu 1.3 Vernetzung) geben kann und weil die Modelle sonst zu groß werden.

Zuerst werden die Grundlagen der FEM-Theorie erarbeitet. Anschließend wird die Bedienung von SolidWorks Simulation erklärt. Dann werden wir anhand verschiedener Beispiele die praktische Umsetzung der Finite-Elemente-Methode kennen lernen.

1.1 Grundlagen der FEM-Theorie

Aus den Grundlagen der Festigkeitslehre wissen wir, dass die Zugspannung in einem Bauteil durch eine Normalkraft F_N in der Schnittebene hervorgerufen wird.



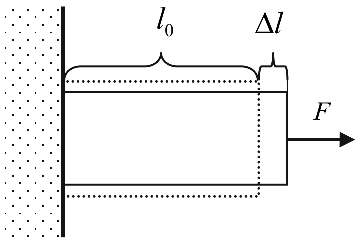
In der Schnittebene x-x gilt: $\sigma_z = \frac{F_N}{A}$ (1)

Die Zugspannung wirkt konstant im gesamten Querschnitt.

Das Hooke'sche Gesetz (2) besagt, dass die Spannung und die Dehnung im elastischen Bereich proportional sind. Diesen Zusammenhang kann man im SpannungsDehnungs-Diagramm gut erkennen.

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon \qquad (2)$$

Die Dehnung ε ist folgendermaßen definiert:
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \qquad (3)$$



wobei Δl der Längenänderung (Verschiebung) entspricht, die unter Einwirkung der Kraft F entsteht. Die ursprüngliche Länge des Bauteils beträgt l_0. Das E-Modul ist das so genannte Elastizitätsmodul. Es entspricht im Spannungs-Dehnungs-Diagramm der Steigung der Hooke'schen Gerade.

Es beträgt zum Beispiel für Stahl $E = 210\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$.

Formt man nun (1) nach der Kraft um und setzt dann für die Zugspannung (2) und (3) ein, erhält man (Indizes werden weggelassen):

$$F = \sigma \cdot A = E \cdot \varepsilon \cdot A = E \cdot A \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \qquad (4)$$

Die so erhaltene Formel (4) stellen wir nun um:

$$F = \frac{E \cdot A}{l_0} \cdot \Delta l \qquad (5)$$

Äußere Kraft
[N]

Steifigkeit
$$\left[\frac{\frac{\text{N}}{\cancel{\text{mm}^2}} \cdot \text{mm}^2}{\text{mm}} = \frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$$

Verschiebung
[mm]

Das ist die Grundgleichung der Finite – Elemente – Methode. Sie besagt:

Äußere Kräfte	=	Steifigkeit	mal	Verschiebung

Bei einer FEM-Analyse sind die äußeren Kräfte bekannt oder müssen vorab bestimmt werden. Die Steifigkeit ergibt sich aus dem Material und der Geometrie des Bauteils. Es können dann immer zuerst Verschiebungen berechnet werden.

Aus diesen werden durch Rückrechnung die Spannungen, Reaktionskräfte (zum Beispiel an den Berührungsstellen von Einzelteilen in einer Baugruppe) und Dehnungen bestimmt.

Beispiel 1:

Der oben dargestellte Zugstab aus S235 (E-Modul $E = 210\,000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$) hat eine Querschnittsfläche von $A = 200\ \text{mm}^2$. Er wird durch eine Zugkraft von $F = 10\,000\ \text{N}$ belastet. Die unbelastete Anfangslänge beträgt $l_0 = 50\ \text{mm}$. Bestimmen Sie die Verschiebung und die Zugspannung.

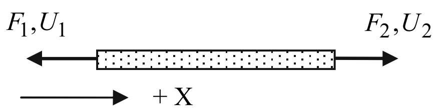
Lösung:

Gleichung (5): $$10\,000\ \mathrm{N} = \frac{210\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\cdot 200\ \mathrm{mm}^2}{50\ \mathrm{mm}}\cdot \Delta l \quad\Rightarrow\quad \Delta l = 0{,}012\ \mathrm{mm}$$

Gleichung (2) und (3): $$\sigma_z = 210\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\cdot\frac{0.012\ \mathrm{mm}}{50\ \mathrm{mm}} = 50\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

Die Finite-Elemente-Methode ist nun aber eine computerorientierte Berechnungsmethode. Als Grundlage für die Berechnungen wird die Matrizenrechnung verwendet. Wenn man diese beim obigen Beispiel anwendet, sieht das folgendermaßen aus:

Am Zugstab greifen die beiden Kräfte F_1 und F_2 an, und rufen jeweils die Verschiebungen U_1 und U_2 hervor.



Gleichung (5): $$F = \frac{E\cdot A}{l_0}\cdot \Delta l$$

$$F = K \cdot U \quad (6)$$

Somit gilt für F_1 und F_2: $$\begin{vmatrix} F_1 = K\cdot U_1 - K\cdot U_2 \\ F_2 = K\cdot U_2 - K\cdot U_1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ Matrizenschreibweise: $$\underbrace{\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$ (wobei die Kraft F_1 negativ ist)

Element-Steifigkeitsmatrix $$\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$$

Nun setzen wir die Werte von oben ein:

Für K erhalten wir $$K = \frac{210\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\cdot 200\ \mathrm{mm}^2}{50\ \mathrm{mm}} = 840\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$$

Durch Einsetzen in die obige Matrizengleichung erhält man:

$$\begin{bmatrix} 840\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}} & -840\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}} \\ -840\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}} & 840\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10\,000\ \mathrm{N} \\ 10\,000\ \mathrm{N} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Diese Matrizengleichung ist statisch unterbestimmt. Erst wenn man die Randbedingung $U_1 = 0$ (weil links fixiert) einführt, ist die Matrizengleichung lösbar:

$$840\,000\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}\cdot U_2 = 10\,000\ \mathrm{N} \quad\Rightarrow\quad U_2 = 0{,}012\ \mathrm{mm}$$

Da es sich bei diesem Beispiel um einen einachsigen Spannungszustand handelt, sieht die Element-Steifigkeitsmatrix sehr einfach aus. Sobald es sich aber um mehrachsige Spannungszustände handelt, wird es bedeutend schwieriger, diese aufzustellen.

Nun kommen wir zur Idee der Finite-Elemente-Methode:

Unabhängig von der Komplexität des zu untersuchenden Bauteiles oder einer Baugruppe sind die grundlegenden Schritte bei allen FEM-Berechnungen gleich. Ausgangspunkt für eine Analyse ist das geometrische Modell. Dieses muss für die Verwendung mit FEM meist noch vereinfacht werden (siehe Bild a). Diesem Modell werden Materialeigenschaften zugewiesen. Anschließend werden Lasten und Lager definiert.

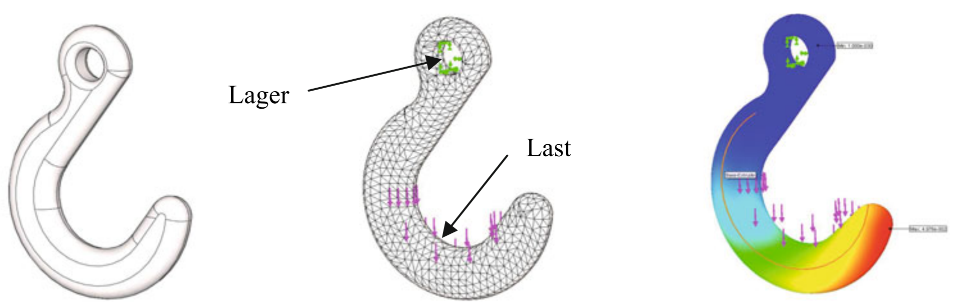
Belastung: Kräfte, Momente, Zwangsverschiebungen

⇓

Reaktion („Antwort“): Verformung, Spannung

Das Modell muss dann diskretisiert werden. Diesen Vorgang nennt man Vernetzen. Dabei wird die Geometrie des Modells in relativ kleine und einfach geformte Einheiten aufgeteilt – die finiten (= endlichen) Teile. Die Elemente (Teile) sind im Verhältnis zur Gesamtgröße des Modells klein (siehe Bild b).

Das FEM-Programm erstellt mit diesen Daten die Element-Steifigkeitsmatrix automatisch. Unter Verwendung der Randbedingungen (Lasten und Kräfte) werden die zu erwartenden Verschiebungen am ganzen Modell berechnet (siehe Bild c). Bei dieser Berechnung arbeitet ein numerischer Gleichungslöser, in dem er ein Gleichungssystem mit oftmals mehreren hunderttausend Gleichungen löst. Wie wir oben gesehen haben, können aus den Verschiebungen die Spannungen und Reaktionskräfte ermittelt werden. Diese Methode ist aber nur eine Annäherung an ein exaktes Ergebnis, die umso besser gelingt, je kleiner das gewählte Element wird.



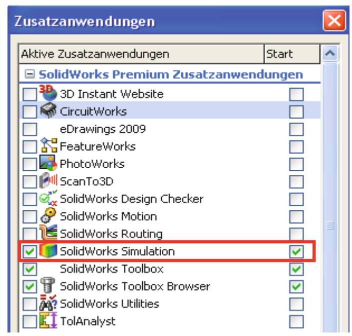
a) b) c)

Der letzte Schritt ist die Interpretation der Ergebnisse. Dieser wird meist unterschätzt. Um fundierte Aussagen über die Resultate einer FEM-Analyse machen zu können, benötigt man fundiertes Ingenieurwissen vor allem aus den Bereichen der Technischen Mechanik (Statik, Dynamik und Festigkeitslehre).

1.2 Simulation mit SolidWorks Simulation

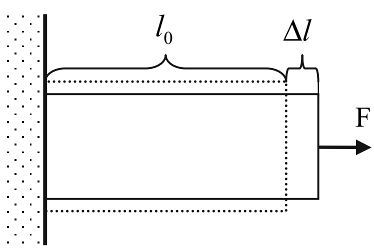
In diesem Kapitel wird gezeigt, wie man mit ***SolidWorks Simulation*** einfache FEM-Analysen durchführt. Bevor eine Studie erstellt werden kann, muss unter Zusatzanwendungen (Extras) ***SolidWorks Simulation*** aktiviert werden. Die Prozessstufen für eine Analyse sind immer die gleichen:

- Erstellen einer Studie
- Anwenden des Materials
- Einspannungen definieren
- Lasten definieren
- Modell vernetzen
- Studie ausführen
- Ergebnisse analysieren.



Die genannten Schritte werden nun anhand eines einfachen Beispiels durchgespielt.

Wir verwenden dazu unser obiges ***Beispiel 1***:



Folgende Werte sind gegeben:

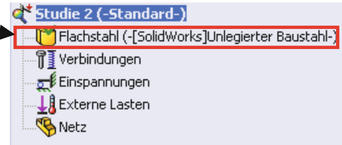
Material:	S235
Kraft:	$F = 10\,000$ N
Querschnitt:	$A = 200\ \text{mm}^2$
Anfangslänge:	$l_0 = 50$ mm
E-Modul:	$E = 210\,000\ \dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

FEM-Analyse:

1. Öffnen Sie das Modell für das Bauteil (Flachstahl.sldprt).
2. Erstellen Sie eine statische Studie (***Simulation-Studie***).

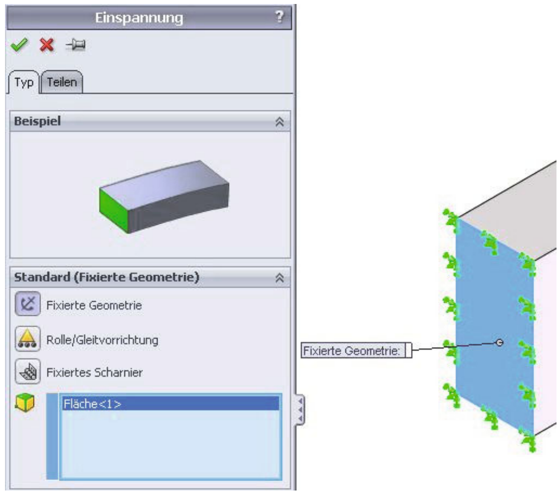
3. Weisen Sie das Material zu.

   Mit Rechtsklick ***Material anwenden/bearbeiten*** wählen. Nehmen Sie ***Unlegierter Baustahl***.

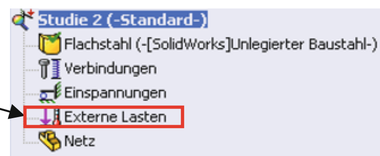


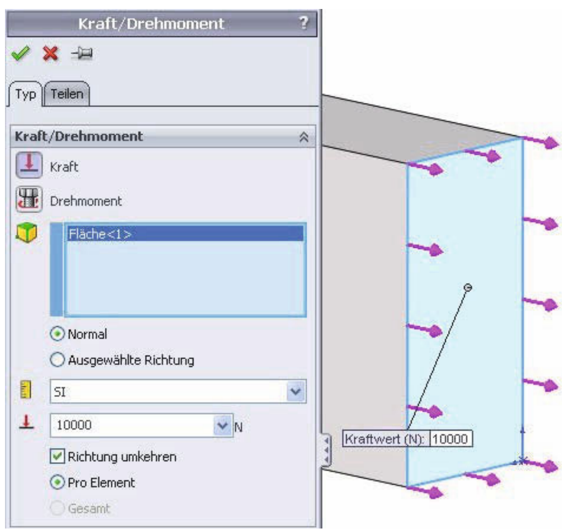
4. Definieren Sie eine feste Einspannung (***Fixierte Geometrie***) mit Rechtsklick auf ***Einspannungen***.

   Das Modell muss an einem Ende befestigt bzw. fixiert werden. Es stehen dazu verschiedene Arten von Einspannungen zur Verfügung. Da es sich bei der gestellten Aufgabe um eine feste Einspannung handelt, kann man für die betreffende Fläche eine fixierte Geometrie wählen.

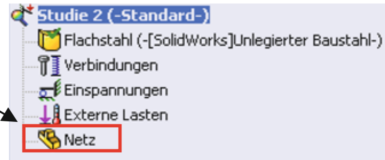


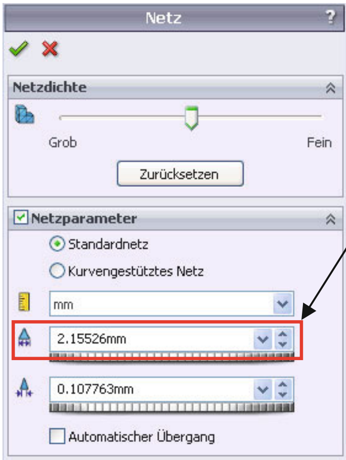
5. Definieren Sie die Kraft mit Rechtsklick auf ***Externe Lasten***. Auf der gegenüberliegenden Seite greift die Kraft von 10 000 N an. Damit der Flachstahl auf Zug belastet wird, muss man ***Richtung umkehren*** aktivieren.



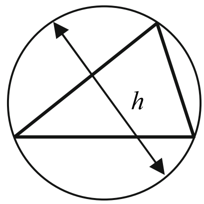


6. Erstellen Sie das Netz mit Rechtsklick und ***Netz erstellen …***

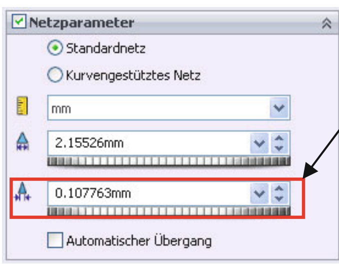




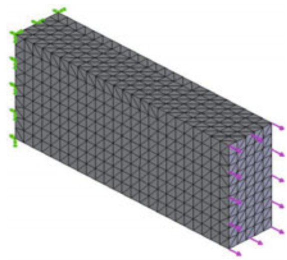
SolidWorks Simulation verwendet standardmäßig eine mittlere Netzdichte für die Vernetzung. Die Elementgröße ist als Durchmesser *h* einer Kugel um das Element definiert.



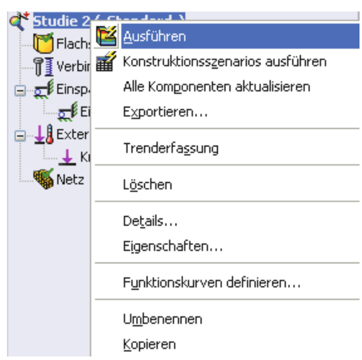
Die Dichte des Netzes beeinflusst die Genauigkeit der Ergebnisse direkt. Je kleiner die Elemente gewählt werden, desto geringer sind die so genannten Diskretisierungsfehler, desto länger dauert jedoch auch die Vernetzung und die Lösungsfindung.



Die Toleranz für die Elementgröße ist standardmäßig bei 5 % der Elementgröße. Eine Erhöhung der Toleranz kann manchmal hilfreich sein, wenn der Netzgenerator das Modell nicht vernetzen kann. So sieht das Modell mit der Vernetzung aus.

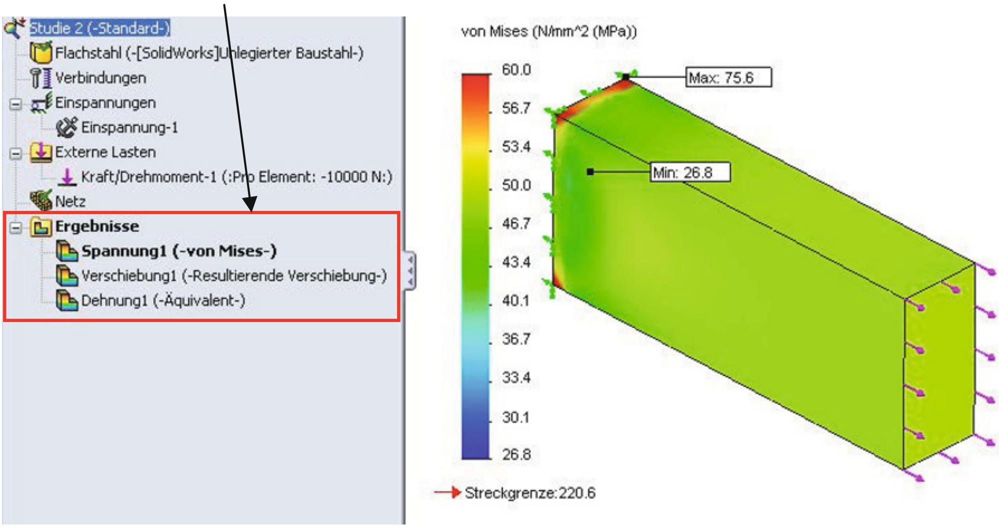


7. Führen Sie die Analyse mit Rechtsklick auf ***Ausführen*** durch. Nach durchgeführter Analyse erscheint der Ergebnisordner. Je nach Einstellung sind in diesem Spannungen, Verschiebungen etc. aufgeführt.



In der aktuellen Darstellung sieht man die Spannungen, die im Bauteil wirken.

Ergebnisordner



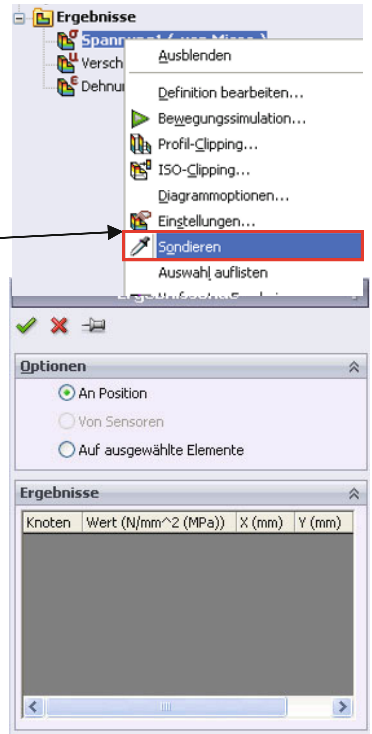
Sie können diverse Einstellungen für diese Ansicht ändern. Mit Doppelklick auf das Diagramm erscheint dieses Fenster:

Hier können Sie die Anzeigeoptionen nach eigenem Bedarf verändern. Wollen Sie sich z. B. einen bestimmten Spannungsbereich zeigen lassen, geben Sie einfach unter ***Definiert*** eine Unter- und Obergrenze (hier 26.8 bis 60.0) ein.

Interpretation der Ergebnisse:

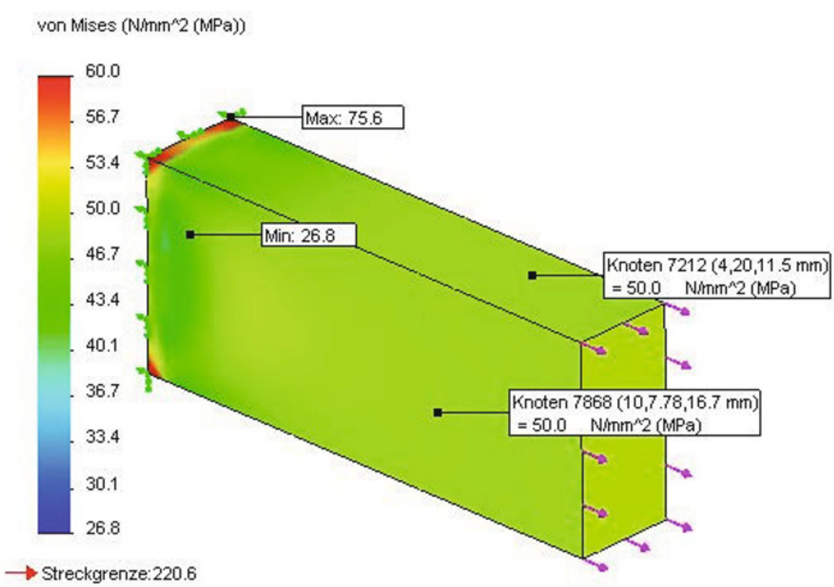
Wir wollen nun vergleichen, ob die simulierten Werte mit den vorher berechneten Werten übereinstimmen.

Zuerst die maximale Zugspannung: Mit Rechtsklick auf Spannung 1, kann man ***Sondieren*** wählen.

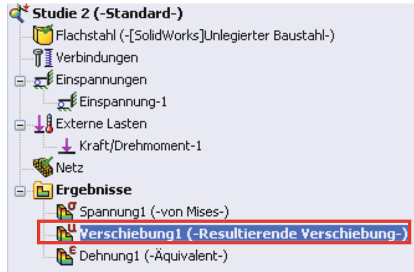


Wenn man bei Optionen ***An Position*** wählt, können an beliebigen Stellen des Modells die vorhandenen Spannungen jeweils am nächstliegenden Knoten gemessen werden.

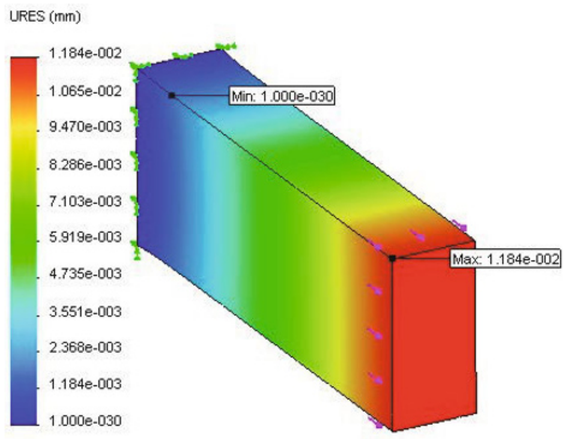
Unten sind an zwei verschiedenen Stellen jeweils ca. $50\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ gemessen worden, was sehr gut mit dem berechneten Wert übereinstimmt.



Vergleichen wir noch die Verformung. Dazu muss man die ***Verschiebung 1*** im Ergebnisordner einblenden.



Man sieht in dieser Darstellung, dass die maximale Verschiebung 0,012 mm beträgt. Auch dieser Simulationswert stimmt mit dem berechneten Wert überein.



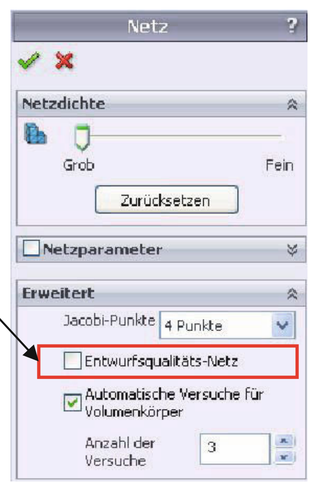
1.3 Vernetzung

In ***SolidWorks Simulation*** sind fünf verschiedene Elementtypen verfügbar:

- Tetraedische Volumenkörperelemente 1. und 2. Ordnung
- Dreieckige Schalenelemente 1. und 2. Ordnung
- Balken- und Stabelemente

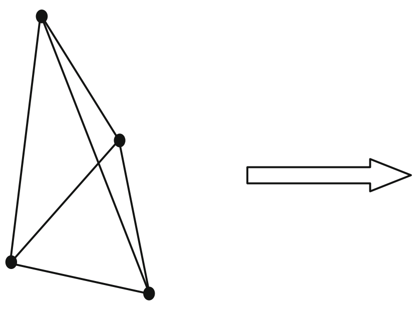
Bei der Vernetzung in Entwurfsqualität handelt es sich um Elemente 1. Ordnung. Elemente 2. Ordnung werden automatisch erstellt, wenn hohe Qualität gewählt wird.

Wenn also ***Entwurfsqualität-Netz*** nicht aktiviert ist, wird automatisch eine Vernetzung 2. Ordnung erstellt.



Tetraedische Volumenkörperelemente 1. Ordnung (Entwurfsqualität) verfügen in jeder Ecke genau über einen Knoten. Das kann bei einer Analyse sehr schnell zu großen Fehlern führen.

Tetraedische Volumenkörperelemente 2. Ordnung verfügen über genau 10 Knoten (4 Eckknoten und 6 Knoten jeweils in der Mitte der Kanten).

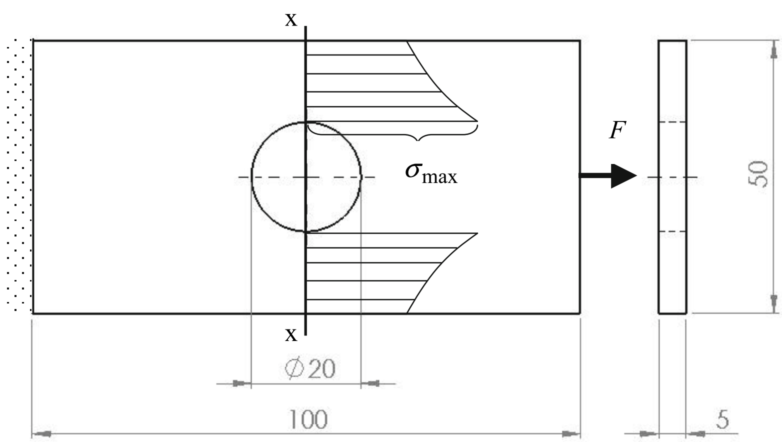


Die Elemente 2. Ordnung können abgerundete Kanten und Flächen besser vernetzen.

Analog zu tetraedischen Volumenkörperelementen 1. und 2. Ordnung gibt es die dreieckigen Schalenelemente 1. und 2. Ordnung. Die Schalenelemente werden für die Vernetzung von Blechen oder ähnlichen Bauteilen verwendet. Wir sehen in den nächsten Beispielen, wie man diese Elementtypen anwenden kann. Die Balkenelemente werden im Kapitel 2.4 Stützträger mit Einzellast erläutert.

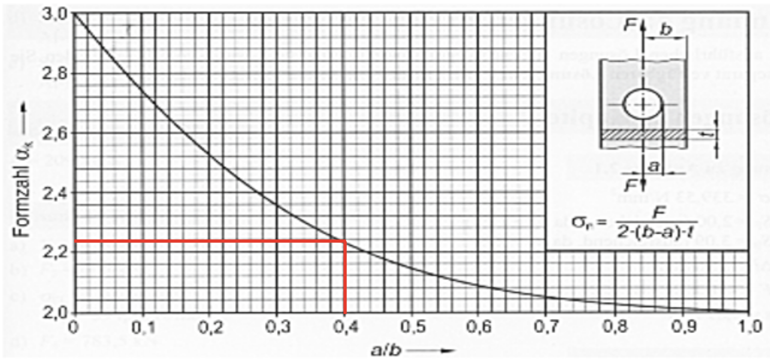
Beispiel 2:

Das unten dargestellte Lochblech (S235) wird mit der Kraft $F = 1\,000\ \text{N}$ belastet. Zuerst berechnen wir die Spannung im gefährdeten Querschnitt x-x.



Nennspannung: $$\sigma_n = \sigma_z = \frac{F}{A} = \frac{1\,000\ \text{N}}{30\ \text{mm} \cdot 5\ \text{mm}} = 6{,}7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Formzahl für Kerbwirkung [3]: $\alpha_k \approx 2{,}24 \qquad \left(\frac{a}{b} = \frac{10\ \text{mm}}{25\ \text{mm}} = 0{,}4 \right)$

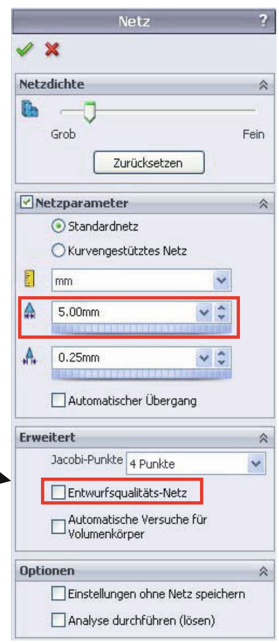


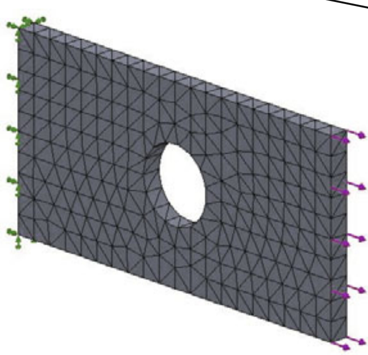
Maximalspannung mit Kerbwirkung: $\sigma_{max} = \alpha_k \cdot \sigma_n = 14{,}9\ \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Es folgt nun eine FEM-Analyse mit zwei verschiedenen Elementtypen. Einmal mit tetraedischen Volumenkörperelementen 2. Ordnung und dann mit Schalenelementen 2. Ordnung.

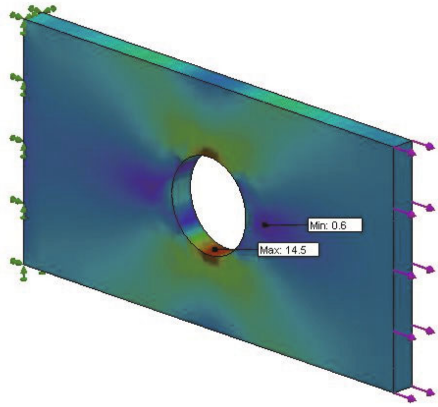
FEM-Analyse (Tetraedische Volumenkörperelemente):

1. Öffnen Sie das Modell für das Bauteil Lochplatte.sldprt.
2. Erstellen Sie eine statische Studie.
3. Material zuweisen (unlegierter Baustahl).
4. Feste Einspannung definieren.
5. Definieren Sie die Kraft $F = 1\,000$ N auf der gegenüberliegenden Seite.
6. Erstellen Sie das Netz (Elementgröße 5 mm). Es werden automatisch tetraedische Volumenkörperelemente 2. Ordnung gewählt, wenn ***Entwurfsqualität-Netz*** nicht aktiviert wurde.





7. Führen Sie die Studie aus.

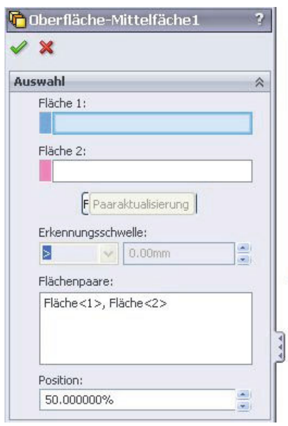


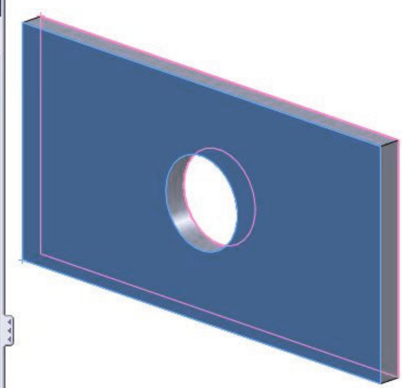
Interpretation der Ergebnisse:

Die maximale Spannung beträgt $\sigma_{\max} \approx 14{,}5 \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$. Dieser Wert stimmt sehr gut mit der analytischen Berechnung ($\sigma_{\max} = 14{,}9 \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$) überein. Wenn man die Elementgröße auf 2,5 mm verkleinert, wird die Spannung mit $\sigma_{\max} \approx 15{,}2 \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ etwas größer.

FEM-Analyse (Schalenelemente):

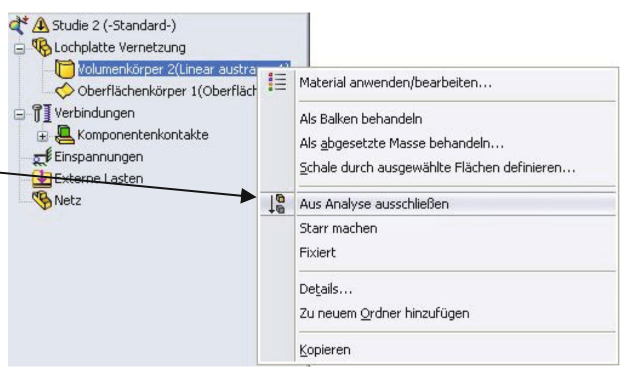
Zuerst müssen am Modell folgende Änderungen vorgenommen werden: Fügen Sie bei der Lochplatte eine Mittelfläche ein (***Einfügen-Oberfläche-Mittelfläche***).





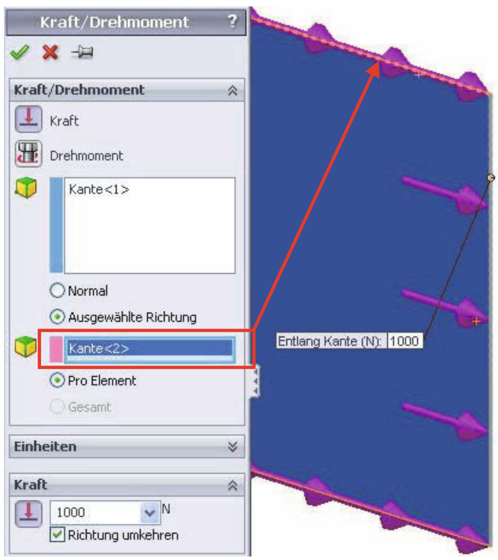
Blenden Sie im Feature Manager ***Linear Austragen 1*** aus. Man sieht so nur noch die Mittelfläche.

1. Erstellen Sie eine statische Studie.
2. Schließen Sie den Volumenkörper aus der Studie aus.
3. Klicken Sie auf ***Oberflächenkörper 1*** und bearbeiten Sie die Definition.



Es kann nun die Schalendefinition vorgenommen werden. Schalenelemente können nur verwendet werden, wenn es sich bei den Komponenten um Blechteile oder Flächen handelt. Zum Unterschied von ***Dünn*** und ***Dick***: Solange das Breite-Dicke-Verhältnis größer als 20 ist, wählt man ***Dünn***. Hier beträgt es $\frac{50\text{ mm}}{5\text{ mm}} = 10$, also wählt man ***Dick***.

4. Material auf ***Oberflächenkörper 1*** anwenden (unlegierter Baustahl).
5. Feste Einspannung an der linken Kante der Schale definieren.
6. Definieren Sie die Kraft $F = 1\,000\text{ N}$ an der gegenüberliegenden Kante. Wählen Sie ***Ausgewählte Richtung*** und dann die obere oder untere Längskante (hier Kante <2>). Dann geben Sie $1\,000\text{ N}$ ein und aktivieren ***Richtung umkehren***.



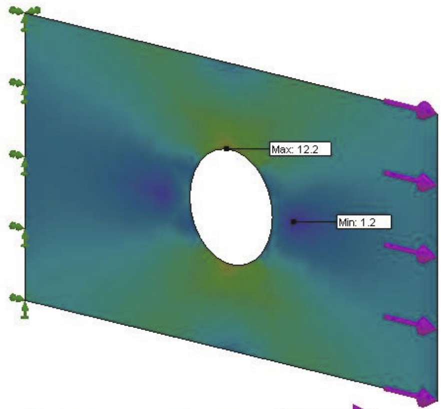
7. Vernetzen Sie mit einer Elementgröße von ca. 5 mm.
8. Führen Sie die Studie aus. Die Einheiten im Diagramm können jederzeit mit Rechtsklick auf ***Spannung 1-Definition bearbeiten*** geändert werden.

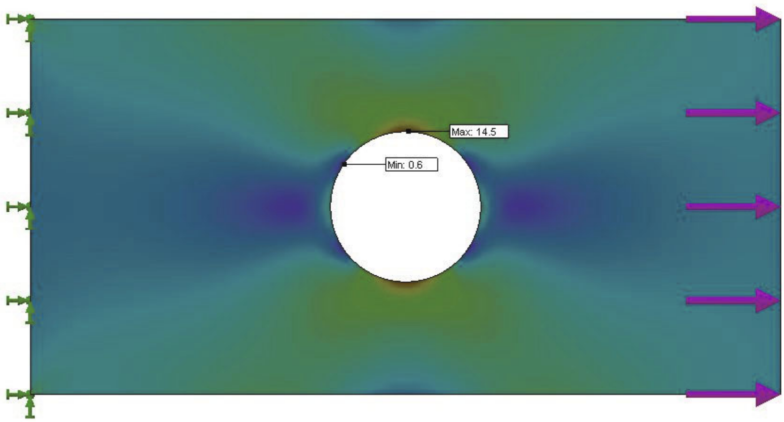
   Stellen Sie $\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ein. Unter Modellverformung können Sie zwischen verschiedenen Optionen wählen. Wählt man ***Automatisch***, wird die Verformung mit dem darunter angegebenen Maßstab dargestellt.

   Bei den Analysen im Buch verwende ich meist ***Wahrer Maßstab***.

Interpretation der Ergebnisse:

Die maximale Spannung beträgt $\sigma_{\max} \approx 12{,}2\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$. Dieser Wert weicht erheblich vom oben berechneten Wert ab. Wir versuchen es erneut mit einer kleineren Elementgröße von $1\,\mathrm{mm}$. So erhalten wir den Wert $\sigma_{\max} \approx 14{,}5\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, welcher wieder sehr gut mit der analytischen Berechnung übereinstimmt.





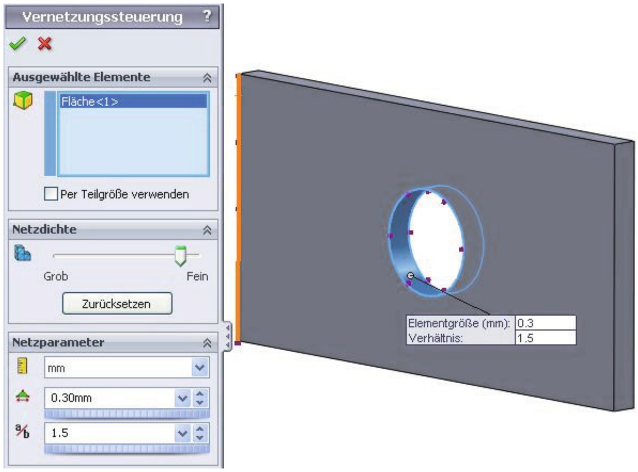
Wir sehen, ob tetraedisches Volumenkörperelement oder Schalenelement spielt für die simulierten Werte keine Rolle. Wir erhalten in beiden Fällen dieselbe maximale Spannung.

Wenn man eine bestimmte Stelle im Bauteil genauer untersuchen möchte, gibt es die Möglichkeit, speziell an dieser Stelle ein feineres Netz zu definieren. Dieses Verfahren nennt man ***lokale Netzverfeinerung***. Wir wenden dieses Verfahren bei der obigen Lochplatte an.

FEM-Analyse: mit Vernetzungssteuerung

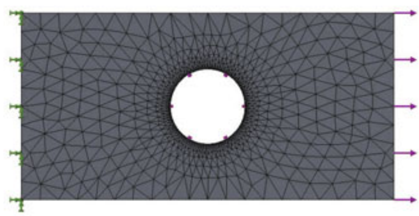
1. Öffnen Sie das Modell für das Bauteil (Lochplatte.sldprt). Wenn Sie am gleichen Modell von oben weiterarbeiten, müssen Sie zuerst den Volumenkörper wieder einblenden.
2. Erstellen Sie eine statische Studie.
3. Weisen Sie das Material zu.
4. Definieren Sie die Feste Einspannung.
5. Definieren Sie die Kraft.
6. Wenden Sie die Vernetzungssteuerung an.

Wählen Sie als Element die Innenfläche der Bohrung. Es können grundsätzlich Eckpunkte, Flächen oder ganze Komponenten von Baugruppen verwendet werden. Als Elementgröße stellen Sie 0,3 mm ein. Durch den Parameter Verhältnis wird der Übergang vom „groben" zum „feinen" Netz definiert. Das Standardverhältnis ist 1,5.

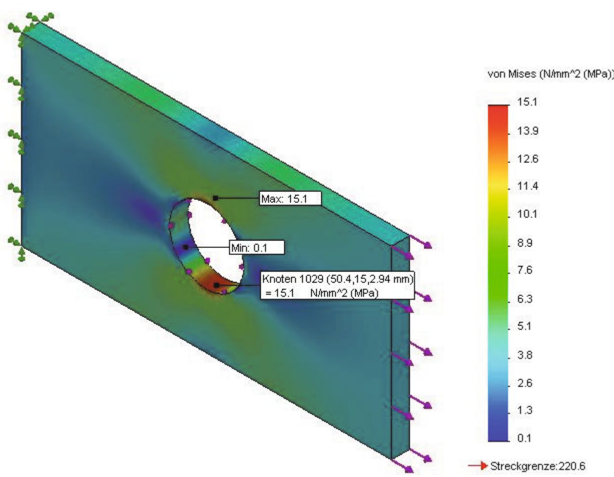


7. Anschließend können Sie wie gewohnt vernetzen. Wählen Sie eine Elementgröße von ca. 2,5 mm .

   Das vernetzte Bauteil sieht so aus:



8. Führen Sie die Studie aus.



Interpretation der Ergebnisse:

Die maximale Spannung liegt jetzt bei $\sigma_{max} \approx 15{,}1\,\dfrac{N}{mm^2}$.

Wir haben verschiedene Spannungswerte erhalten. Hier nochmals in der Übersicht:

	Berechnungs- bzw. Simulationsart	**Max. Spannung** $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$
1	Analytische Berechnung	14,7
2	Tetraedische Volumenkörperelemente (Elementgröße 5 mm)	14,5
3	Tetraedische Volumenkörperelemente (Elementgröße 2,5 mm)	15,2
4	Schalenelemente (Elementgröße 1 mm)	14,5
5	Vernetzungssteuerung 0,3 mm mit Volumenkörperelemente (Elementgröße 5 mm)	15,1

Die Spannungswerte liegen in einem Bereich von ca. 5 %. Der Wert, der der Realität am nächsten kommt, dürfte der mit Vernetzungssteuerung (Volumenkörper) $\sigma_{max} \approx 15{,}1 \frac{N}{mm^2}$ sein.

1.4 Vergleichsspannung

Wenn man im Ergebnisordner die Spannungsdarstellungen bearbeitet, sieht man folgendes Fenster:

Bei ***Komponente*** hat man eine große Auswahl.

An dieser Stelle soll nur auf die Von-Mises-Spannung eingegangen werden. Es handelt sich hierbei um eine Festigkeitshypothese, die so genannte Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH).

Wenn an einem Bauteil mehrere Beanspruchungsarten gleichzeitig wirken, z. B. Biegung und Torsion, kann man aus diesen eine so genannte Vergleichsspannung berechnen. Die Biegebeanspruchung bewirkt Normal- und die Torsionsbeanspruchung Schubspannungen. Die Umrechnung dieser beiden Spannungskomponenten auf eine einzige Normalspannung gelingt mit den Festigkeitshypothesen.

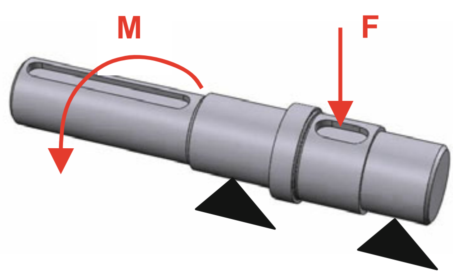
Die drei wichtigsten sind

- die Normalspannungshypothese (NH)
- die Schubspannungshypothese (SH) und
- die Gestaltänderungsenergiehypothese (GEH) = Von-Mises-Spannung

Die ersten beiden Hypothesen ergeben meist die etwas höheren Spannungen, sind also konservativer.

Kurz zur Idee der Von-Mises-Spannung:

Auf eine Getriebewelle wirken zwischen den Lagerstellen Biegung und Torsion.



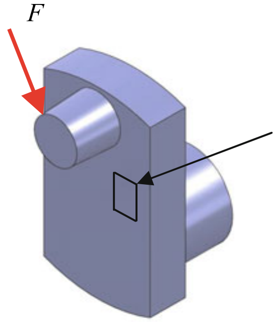
Wenn man nun Biegespannung σ_b und Torsionsspannung τ_t in einem bestimmten Querschnitt berechnet hat, kann daraus die Vergleichsspannung bestimmt werden.

Hier gilt nach Von-Mises: $\sigma_V = \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau_t^2}$

Diese Formel gilt nur, wenn beide Belastungsarten den gleichen Lastfall (ruhend, schwellend oder wechselnd) haben.

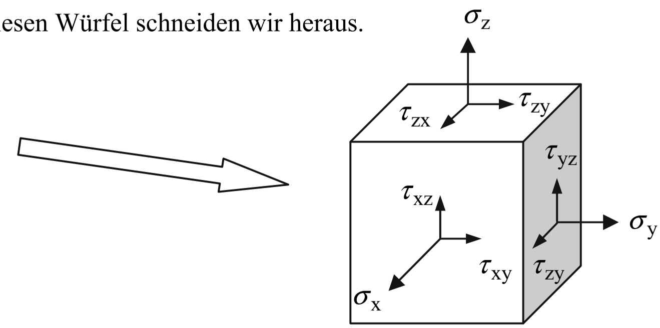
In diesem Beispiel handelt es sich um einen zweiachsigen Spannungszustand. Die zulässigen Festigkeitswerte stammen aber oftmals aus einachsigen Versuchswerten. Man rechnet mit der Vergleichsspannung eigentlich die Torsionsspannung (Schubspannung) in eine Normalspannung um.

Bei einem dreiachsigen Spannungszustand sieht es etwas komplizierter aus:



Bei der links dargestellten Kurbelwange wirkt die schräge Kraft F auf den Kurbelzapfen.

Diesen Würfel schneiden wir heraus.



Betrachtet man den Würfel, sieht man, dass auf jeder Fläche Normal- und Schubspannungen wirken können. Wegen den Gleichgewichtsbedingungen sind es insgesamt 6 Spannungskomponenten (3 Normalspannungen: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ und 3 Schubspannungen $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$).

Hier gilt nach Von-Mises:

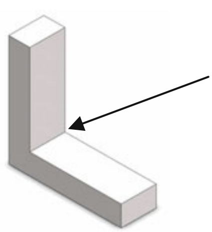
$$\sigma_V = \sqrt{0.5[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 3(\tau_{xy}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 + \tau_{xz}{}^2)}$$

Damit kein Versagen im Bauteil auftritt, muss gelten: $\sigma_V \leq \sigma_{zul}$

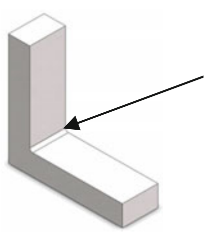
Die zulässigen Festigkeitswerte sind den entsprechenden Tabellen zu entnehmen (z. B. Roloff/Matek).

1.5 Spannungssingularitäten

Wie wir am folgenden Beispiel sehen, sind die Spannungen an einer scharfen Einsprungkante singulär, d. h. unendlich groß. Der unten dargestellte Winkel wird ohne und mit Eckausrundung mit FEM simuliert.



Ohne Eckausrundung

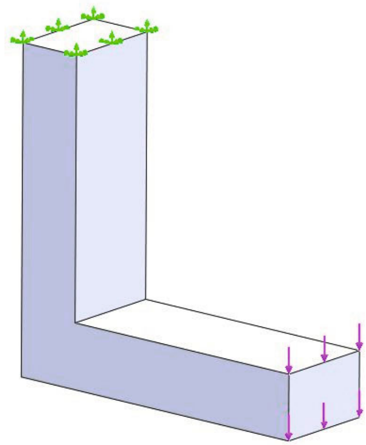


Mit Eckausrundung 3 mm

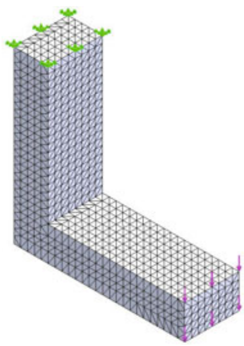
Für den Winkel ohne Eckausrundung wird definiert:

Fixierte Geometrie (an der oberen Fläche), Kraft von 900 N (an der vorderen Fläche).

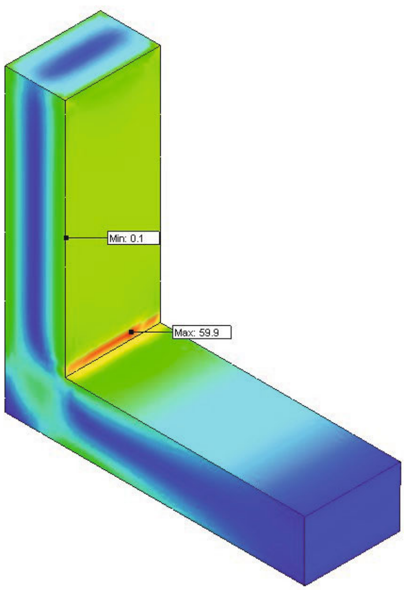
Es werden die maximalen Von-Mises-Spannungen und die maximale Verschiebung ermittelt.



a) Mit Vernetzung Elementgröße 4 mm

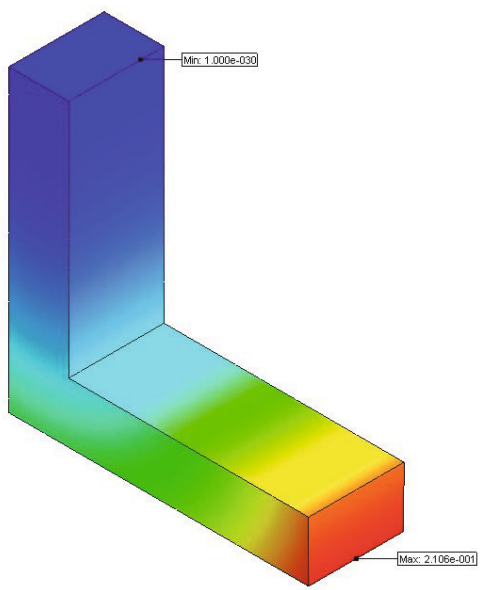


Spannungsdarstellung



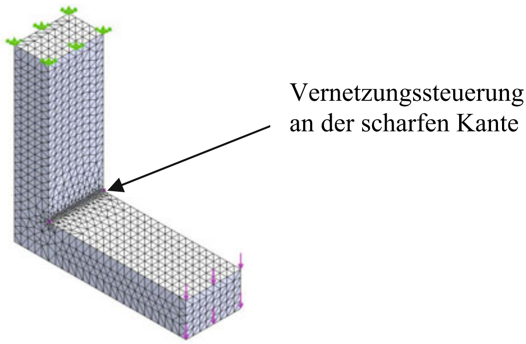
Max. Von-Mises-Spannung $59{,}9\ \frac{N}{mm^2}$

Verschiebungsdarstellung

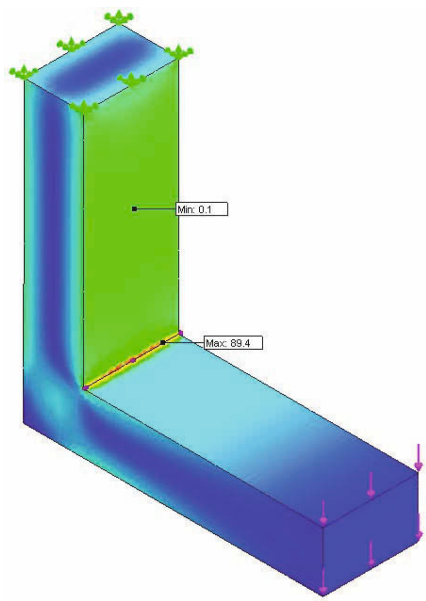


Max. Verschiebung 0,2106 mm

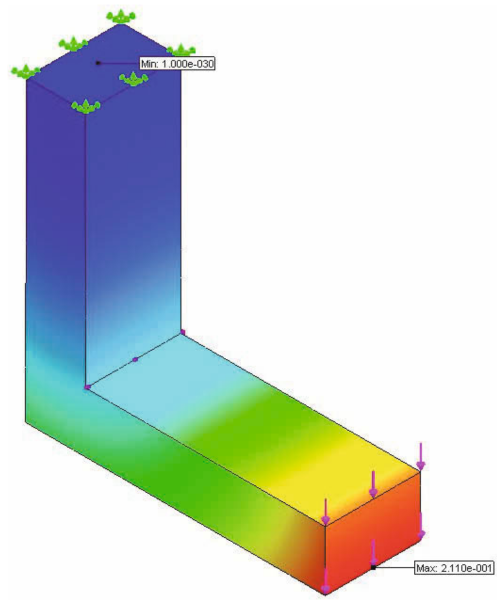
b) mit Vernetzungssteuerung Elementgröße 1 mm an der scharfen Kante (Vernetzung bleibt mit Elementgröße 4 mm)



Spannungsdarstellung



Verschiebungsdarstellung

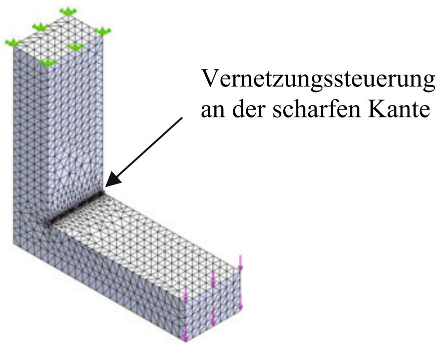


Max. Von-Mises-Spannung $89{,}4\,\dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

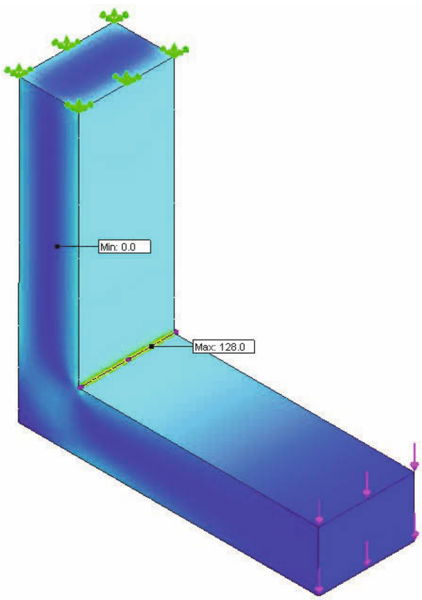
Max. Verschiebung 0,2110 mm

Wir beobachten, dass sich der maximale Spannungswert an der scharfen Kante von ca. $60\,\dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ auf ca. $90\,\dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ erhöht hat. Die Verformung ist unmerklich (weniger als $\dfrac{1}{1\,000}$ mm) größer geworden. Wir verfeinern die Vernetzungssteuerung weiter:

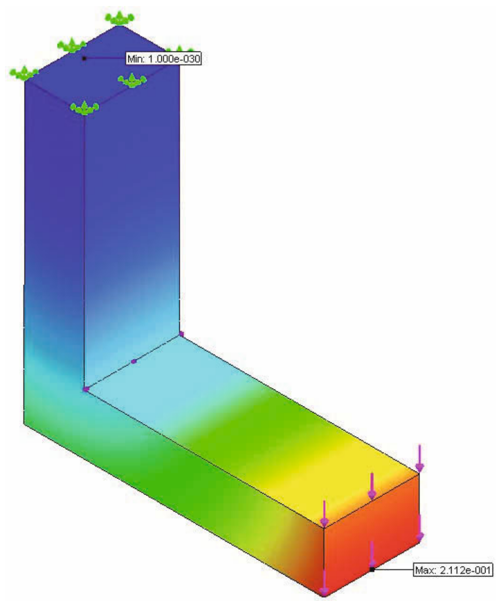
c) mit Vernetzungssteuerung Elementgröße 0,5 mm an der scharfen Kante (Vernetzung bleibt mit Elementgröße 4 mm)



Spannungsdarstellung



Verschiebungsdarstellung

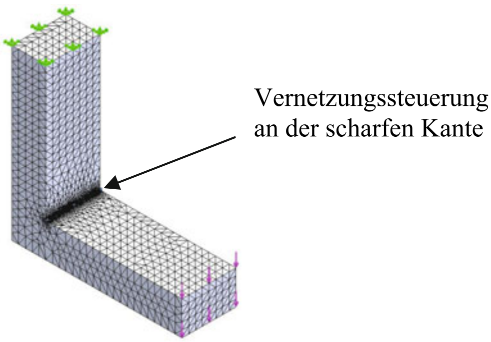


Max. Von-Mises-Spannung $128 \dfrac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

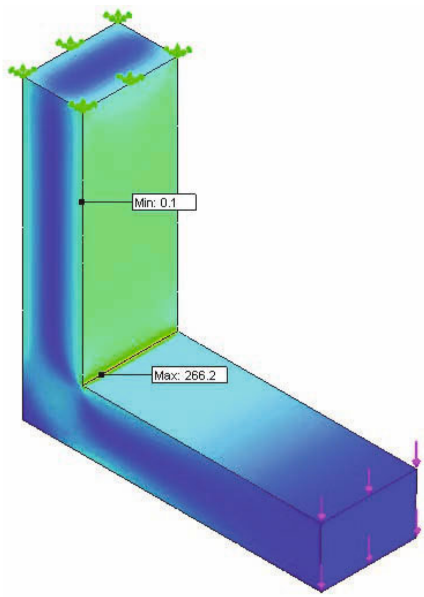
Max. Verschiebung 0,2112 mm

Die maximale Spannung steigt weiter an und die Verformung ändert sich weiterhin unmerklich. Da die Spannungswerte immer größer werden, kann man sagen: die Spannungswerte divergieren. Die Verformungswerte ändern sich immer weniger: die Verformungswerte konvergieren. Wir wollen herausfinden, wie sich obige Werte weiter entwickeln, wenn man die Vernetzungssteuerung weiter verfeinert.

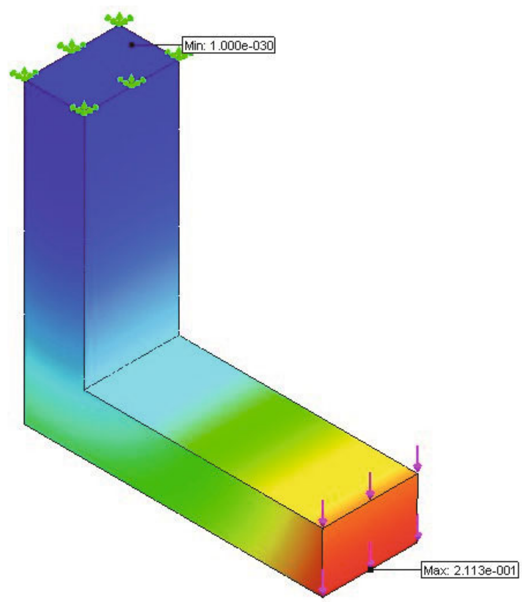
d) mit Vernetzungssteuerung Elementgröße 0,1 mm an der scharfen Kante (Vernetzung bleibt mit Elementgröße 4 mm)



Spannungsdarstellung



Verschiebungsdarstellung



Max. Von-Mises-Spannung $266{,}2\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$ Max. Verschiebung $0{,}2113$ mm

Wir sehen, dass die Spannungswerte weiter zunehmen. Die Verformungswerte nehmen um noch weniger zu. Die folgende Zusammenstellung zeigt die für alle simulierten Fällen erhaltenen Werte mit den jeweiligen Vernetzungen:

Die Von-Mises-Spannungen werden bei Verfeinerung des Netzes immer größer, das heißt sie divergieren.

Die Verschiebungen hingegen vergrößern sich immer weniger, das heißt, sie konvergieren gegen einen bestimmten Wert.

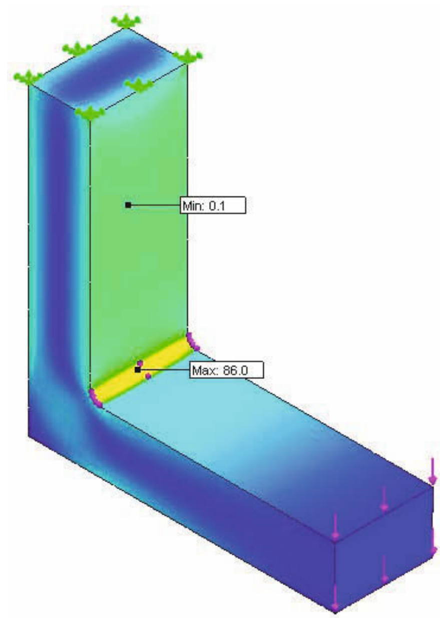
Zusammenstellung der Spannungs- und Verschiebungswerte:

Vernetzung **Elementgröße** 4 mm	**Max. Von-Mises-Spannung** [$\frac{N}{mm^2}$]	**Max. Verschiebung** [mm]
Ohne Vernetzungssteuerung	59,9	0,2106
Mit Vernetzungssteuerung Elementgröße 1 mm	89,4	0,2110
Mit Vernetzungssteuerung Elementgröße 0,5 mm	128,0	0,2112
Mit Vernetzungssteuerung Elementgröße 0,1 mm	266,2	0,2113

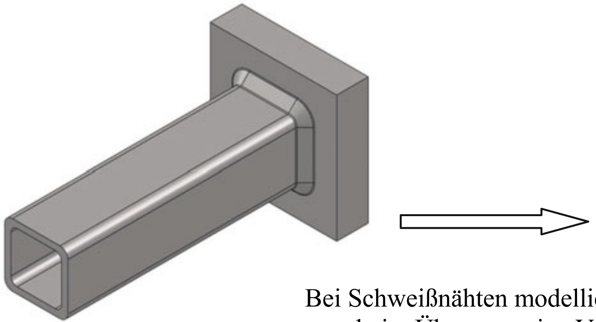
Der Grund für die Divergenz der Spannungswerte liegt nicht darin, dass das Finite-Elemente-Modell falsch ist, sondern dass es auf dem falschen mathematischen Modell basiert. Entsprechend der Elastizitätstheorie ist die Spannung in der einspringenden Kante unendlich groß – ein Mathematiker würde diese Spannung als singulär bezeichnen. Daher kommt der Ausdruck Spannungssingularitäten. Dieser Fehler tritt an jeder „unendlich" scharfen Kante auf. Will man diesen Fehler verhindern, muss das Modell an dieser Stelle eine kleine Rundung besitzen.

Der rechts dargestellte Winkel hat einen Radius von 3 mm an dieser Stelle. Mit dem Radius im Modell konvergieren die Spannungswerte mit derselben Vernetzungsreihenfolge wie oben gegen die maximale Von-Mises-Spannung $86 \frac{N}{mm^2}$. Die Verschiebungen werden hier nicht kontrolliert, da sie sowieso konvergieren.

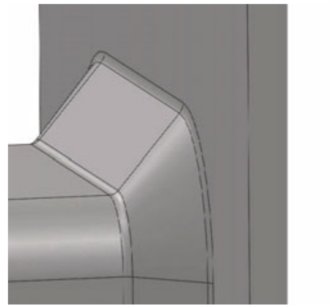
Verschiebungen sind die Hauptunbekannten in der Finite-Elemente-Analyse und werden als solche immer erheblich genauer als Spannungen und Dehnungen sein. Eine relativ grobe Vernetzung ergibt bereits zufrieden stellende Verschiebungsergebnisse, während für gute Spannungsergebnisse in der Regel erheblich feinere Netze erforderlich sind.



Hier noch ein Beispiel für scharfe Kanten, die durch Rundungen ergänzt worden sind:



Bei Schweißnähten modelliert man beim Übergang eine Verrundung mit 1 mm Radius



Zum Abschluss dieses Kapitels noch eine Zusammenstellung von Grundregeln für FEM-Berechnungen:

- Bei FEM-Berechnungen ist mit einem kumulierten Fehler von 7–10 % zu rechnen
- FEM-Berechnungen immer mit analytischen Abschätzungsberechnungen überprüfen
- Bei der Vernetzung überlegen, welcher Elementtyp sinnvollerweise verwendet werden soll
- Bei vermuteten Spannungskonzentrationen ein engmaschigeres Netz wählen
- Um Spannungssingularitäten zu verhindern, sollten alle scharfe Kanten mit Rundungen versehen werden.

1.6 Verständnisfragen

1. Wie lautet die Grundgleichung der Finite-Elemente-Methode?
2. Was versteht man unter der Steifigkeit eines Bauteiles und welche Einheit hat sie?
3. Liefert die Finite-Elemente-Methode exakte Ergebnisse?
4. Welche Größen berechnet ein FEM-Programm zuerst?
5. Welche Prozessstufen durchläuft man bei einer Analyse mit SolidWorks Simulation?
6. Über welche Elementtypen verfügt SolidWorks Simulation?
7. Was ist der Unterschied zwischen Elementen 1. und 2. Ordnung?
8. Wann verwenden Sie Schalenelemente und welchen Vorteil bringt das im Vergleich zu Volumenkörperelementen?
9. Welchen Einfluss hat die Netzgröße?
10. Was versteht man unter Vernetzungssteuerung und wann wendet man sie an?
11. Was versteht man unter einer Vergleichsspannung?
12. Was ist eine Spannungssingularität?